ЖСТ- ҚОЗҒАЛЫСТЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ МӘСЕЛЕЛЕРІ
Н.БЕЙСЕН

Лекция 4_ Шварцшильд есебіндегі орбиталды тұрақтылық

Мына түрдегі бірінші жуықтау метрикасынан бастаймыз:

$$dS^2 = \left[c^2 - 2U\left(1 + \frac{2}{3m_0c^2}\varepsilon_0\right) + \frac{2U^2}{c^2}\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)d\vec{r}^{\,2}, \qquad (1)$$

мұндағы $U = \frac{\gamma m_0}{r}$, ε_0 - кері таңбамен алған бөлшектердің өзара тартылыс энергиясы. Сонда массасы m қозғалыс метрикасындағы сынақ денесінің гамильтонианы

$$H = mc^2 + \frac{P^2}{2m} - mU - \frac{1}{c^2}\left(\frac{P^4}{8m^3} + \frac{3P^2U}{2m} + \frac{2\varepsilon_0}{3m_0}mU - \frac{1}{2}mU^2\right), \qquad (2)$$

мұндағы $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{V}}$ - сынақ денесінің импульсі, L- Лагранж функциясы. Ал, сынақ денесінің қозғалыс теңдеуі

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(4E + 6mU + \frac{2m}{3m_0}\varepsilon_0\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U \cdot \vec{M}\right]}{mc^2}, \qquad (4)$$

мұндағы $\vec{M}, \vec{A}$ - орбитаның векторлық элементтері (импульс моменті және Лаплас векторы), E- релятивистік емес энергия. Еске ала кетейік

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{P}\right], \qquad \vec{A} = \left[\frac{\vec{P}}{m}\vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r}, \qquad A = \gamma m m_0 e = \alpha e, \qquad (5)$$

мұндағы e - орбитаның эксцентриситеті. Бастапқыда сынақ денесінің эволюциялық қозғалысын қарастырамыз. Сонда (3) және (4) бейсызық механиканың асимптоталық тәсілдерін пайдаланып – орташалау әдісі арқылы келесі қозғалыс теңдеуін аламыз

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right], \tag{7}$$

мұндағы

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}} = \frac{3m\alpha^4 \vec{M}}{M^3 M_0^3 c^2}. \tag{8}$$

гамильтонианның орташа мәні

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0^2} - \frac{2m}{3m_0}\varepsilon_0\right)\frac{\alpha^2}{M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 M c^2}, \tag{9}$$

мұндағы

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha^2}}}, \tag{10}$$

Жүйенің инварианты. (6) и (7) теңдеулерінен қозғалыс интегралын жазамыз

$$\vec{M} = \text{const}, \quad \vec{A} = \text{const}. \tag{11}$$

Осыдан Шварцшильд есебіндегі сынақ денесінің орбиталдық орнықтылығы туындайды. Шынында, сынақ денесінің қозғалысының орбиталдық орнықтылығы ретінде оскулдаушы эллипстің кез келген уақыт моментінде өзінің пішіні мен өлшемін сақтауы және оның пішіні мен өлшемінің бастапқы уақыт моментінде анықталған ұйытқымаған эллипс пішіні мен өлшемдеріне жуық болуын айтады. Эллипстің пішіні мен өлшемін e эксцентриситет және $2a$ фокалдық остің ұзындығымен сипаттайды. Егер өрнекте e және a ғасырлық мүшелер жоқ болса, анықтамаға сай эллипстік қозғалыс орбитальды орнықтылық орын алады [1]. (11) өрнегінен

$$a = \text{const}, \quad e = \text{const}, \tag{12}$$

сондықтан, сынақ денесінің сұйық шардың өрісіндегі қозғалысы орнықты болып табылады. Енді жалпы қозғалысты зерттейік. Ол үшін қозғалыстың дәл теңдеулерін (3) және (4) сызықты емес механиканың басқа асимптотикалық әдісімен - пертурбация әдісімен интегралдаймыз. Сонда [1] аламыз.

$$M = \text{const}, \tag{13}$$

$$A = A_0 - \frac{4\gamma m_0}{c^2}\left(2E + \frac{2m\varepsilon_0}{3m_0} + \frac{3\alpha}{P}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{3\gamma\alpha m_0 e}{Pc^2}\sin^2\varphi, \tag{14}$$

Мұндағы p – орбитаның параметрі. Бұдан жалпы қозғалыс эволюциялық және периодтық қозғалыстардан тұратынын аңғаруға болады. (14) көрініп тұрғандай, жалпы қозғалыс жағдайында да орбиталық тұрақтылық орын алады, өйткені эксцентриситет e те, фокалды осьте $2\ a$ де ғасырлық мүшелері болмайды.

Қолданылған әдебиет

[1]. Лахтин Л.М. Свободное движение в поле Земного сфероида. Москва, 1963. с.120.

[2]. В.И. Арнольд. Решение задачи об устойчивости движения в произвольных гамильтоновых системах при наличии постоянно